

FUNÇÕES – Parte 2

Disciplina: Lógica Aplicada

Prof. Rafael Dias Ribeiro

Autoria: Prof. Denise Candal

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Definição: Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada de *função quadrática* ou *função do 2º grau*.

Exemplos:

- $y = 3x^2 - x - 2$
- $f(x) = 4x^2 - 2$
- $f(x) = 5x^2/3 - x/2$
- $y = x^2$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Exemplos:

1. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$

2. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde $a = 3$, $b = -4$, $c = 1$

3. $f(x) = x^2 - 1$, onde $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$

4. $f(x) = -x^2 + 2x$, onde $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$

5. $f(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$, $c = 0$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, onde $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Gráfico

Exemplo: Construir o gráfico da função $y = x^2 + x$.

- Atribuímos a x alguns valores; depois calculamos o valor de y e, em seguida, ligamos os pontos obtidos.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

$$y = x^2 + x.$$

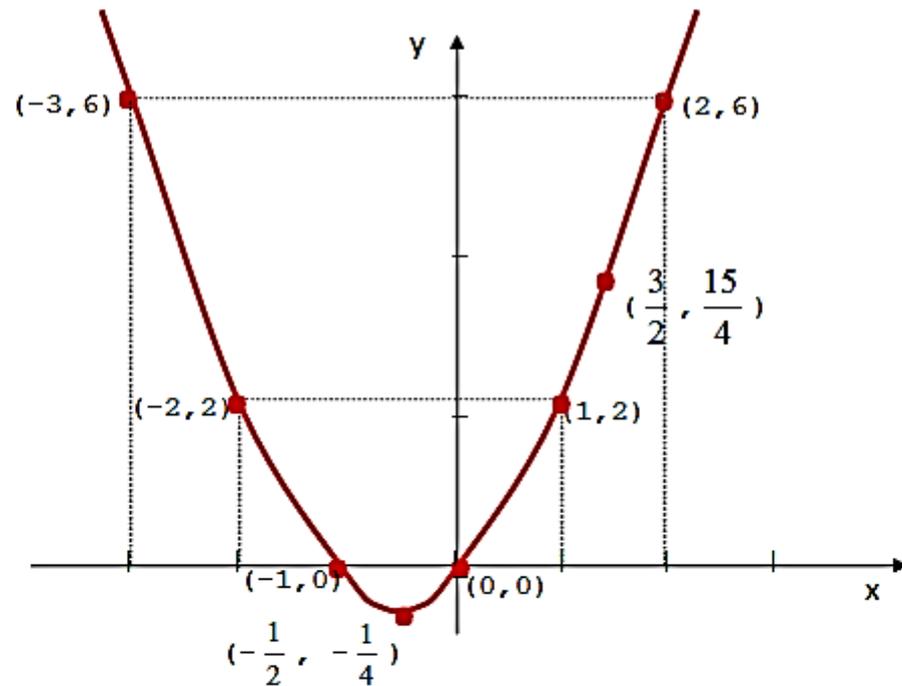
x	$x^2 + x$	y
-3	$(-3)^2 + (-3)$	6
-2	$(-2)^2 + (-2)$	2
-1	$(-1)^2 + (-1)$	0
-1/2	$(-1/2)^2 + (-1/2)$	-1/4
0	$(0)^2 + (0)$	0
1	$(1)^2 + (1)$	2
3/2	$(3/2)^2 + (3/2)$	15/4

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

$$y = x^2 + x.$$

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
-1/2	-1/4
0	0
1	2
3/2	15/4

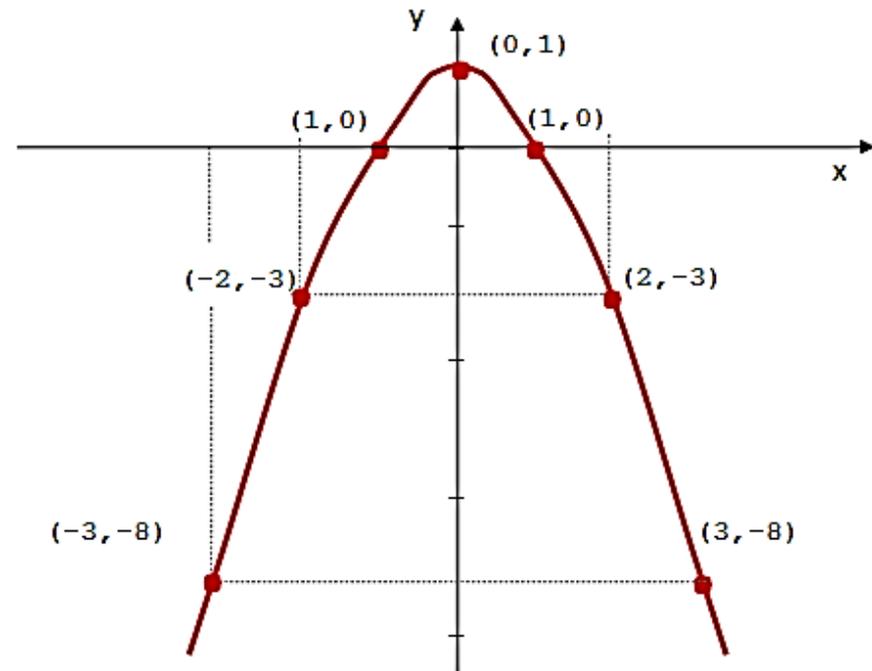


Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Exemplo: Construir o gráfico da função $y = -x^2 + 1$.

x	y
-3	-8
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
2	-3
3	-8



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

- Zeros ou Raízes da Função

Estes pontos são aqueles em que a parábola intercepta o eixo x . Para obtê-los a partir de $y = ax^2 + bx + c$, basta atribuímos o **valor zero à variável y** e resolver a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Utilizamos a fórmula de Bháskara: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Zeros ou Raízes da Função - Gráfico

➔ Se a equação tiver $\Delta > 0$, então terá **duas raízes reais e distintas**: $x_1 \neq x_2$.

Assim, os pontos de intersecção da parábola com o eixo Ox são $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Zeros ou Raízes da Função - Gráfico

➡ Se a equação tiver $\Delta = 0$, então terá **duas raízes reais e iguais**: $x_1 = x_2$.

Assim, a parábola será tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

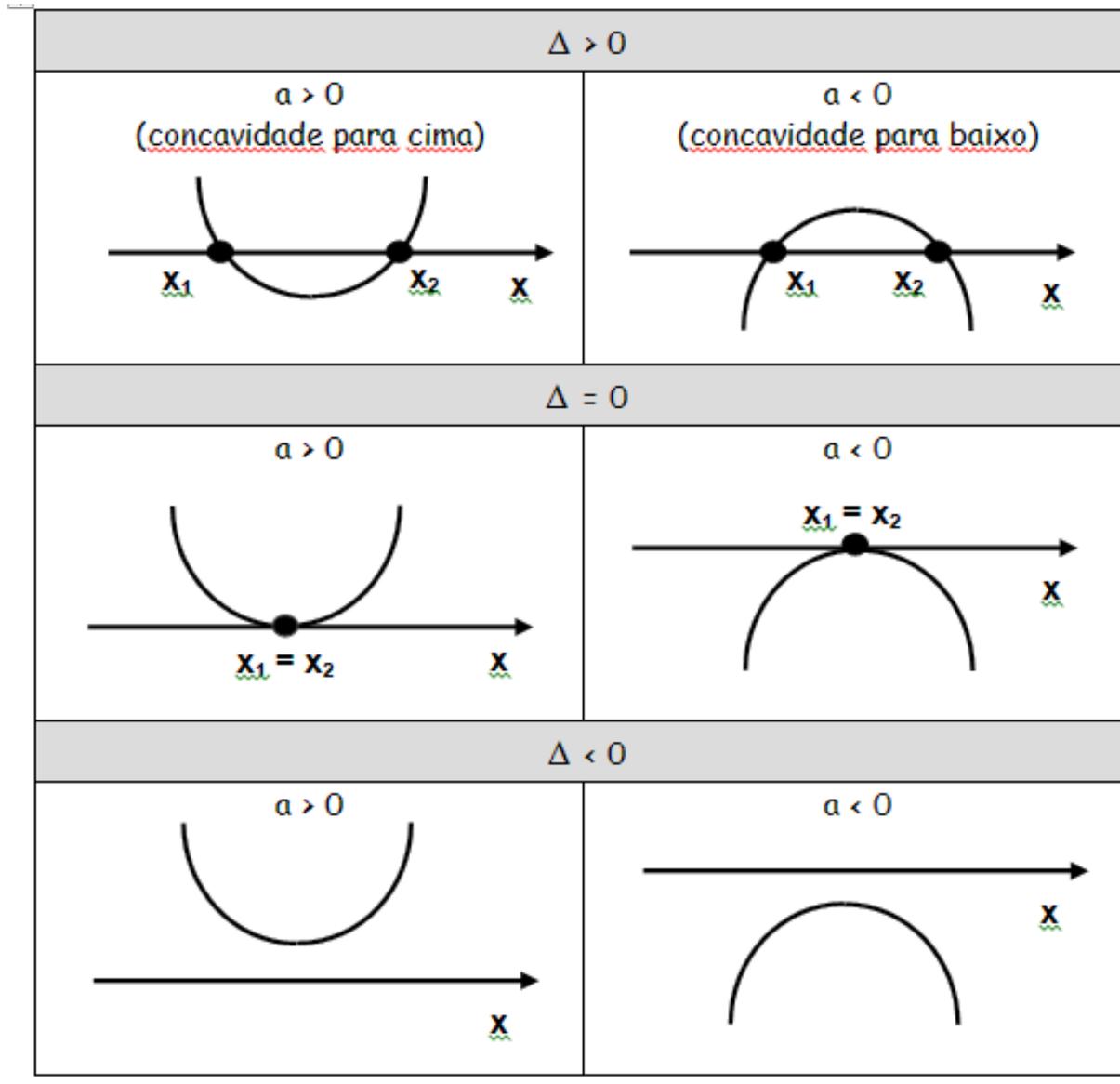
Função Quadrática ou do 2º grau

Zeros ou Raízes da Função - Gráfico

➡ Se a equação tiver $\Delta < 0$, então **não terá raízes reais**.

Assim, a parábola **não terá ponto em comum** com o eixo Ox.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Exemplo: Esboçar o gráfico da função $y = 2x^2 - x - 1$.

1. Determinar os pontos de intersecção de seu gráfico com o eixo Ox:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9.$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Como $\Delta > 0 \rightarrow$ a parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

2- Determinar x_1 e x_2 : $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

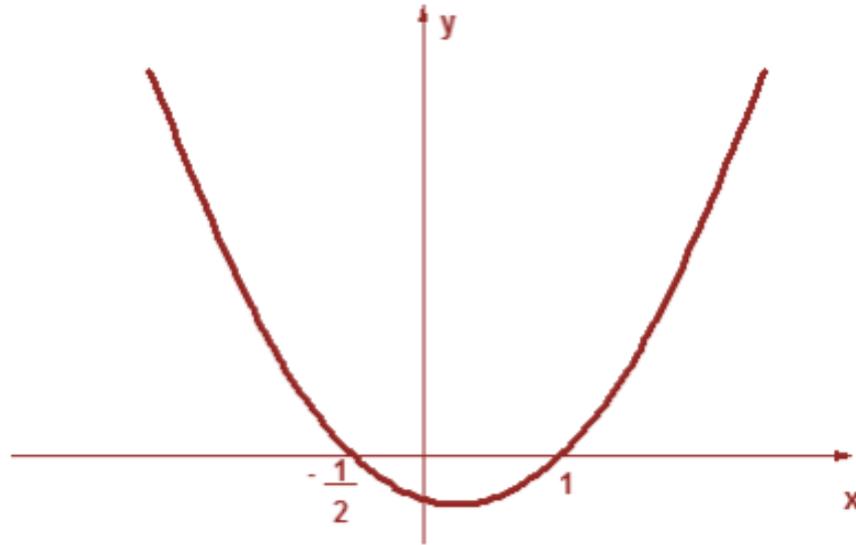
$y = 2x^2 - x - 1$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x_1=1; x_2=-1/2}$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Sabemos ainda que o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$); logo, a parábola tem **concavidade voltada para cima**:



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Exemplo: Esboçar o gráfico da função $y = -4x^2 - 12x - 9$.

Determinar Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-12)^2 - 4(-4)(-9) = 0$$

➡ Como $\Delta = 0$, temos duas raízes reais e iguais ($x_1 = x_2$).

Portanto, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Determinando as raízes, temos: **$y = -4x^2 - 12x - 9$**

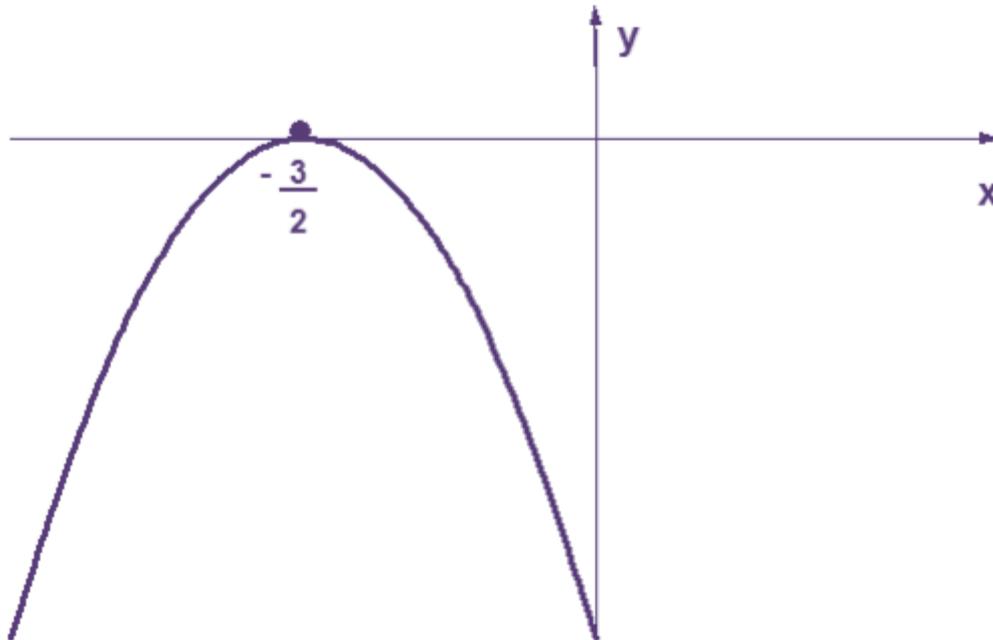
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-4)}$$

$$\mathbf{x_1 = x_2 = -3/2}$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

O coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$); logo, a parábola tem **concauidade voltada para baixo**:



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

O vértice da parábola

O vértice V é o ponto de intersecção da parábola com seu eixo de simetria e .

O vértice $V(x_v, y_v)$ da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é o ponto:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

O vértice da parábola

Exemplo: Determinar o vértice da função $y = 2x^2 - x - 1$

$$x_V = \frac{-b}{2.a} \quad y_V = \frac{-\Delta}{4.a}$$

$$\bullet x_V = -(-1)/2.2 = 1/4$$

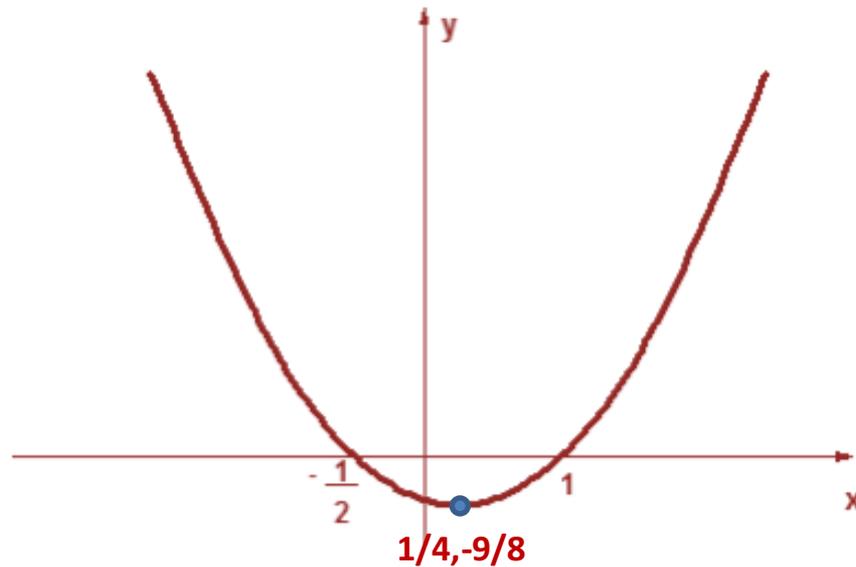
$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$\bullet y_V = -9/4.2 = -9/8$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

O vértice da parábola

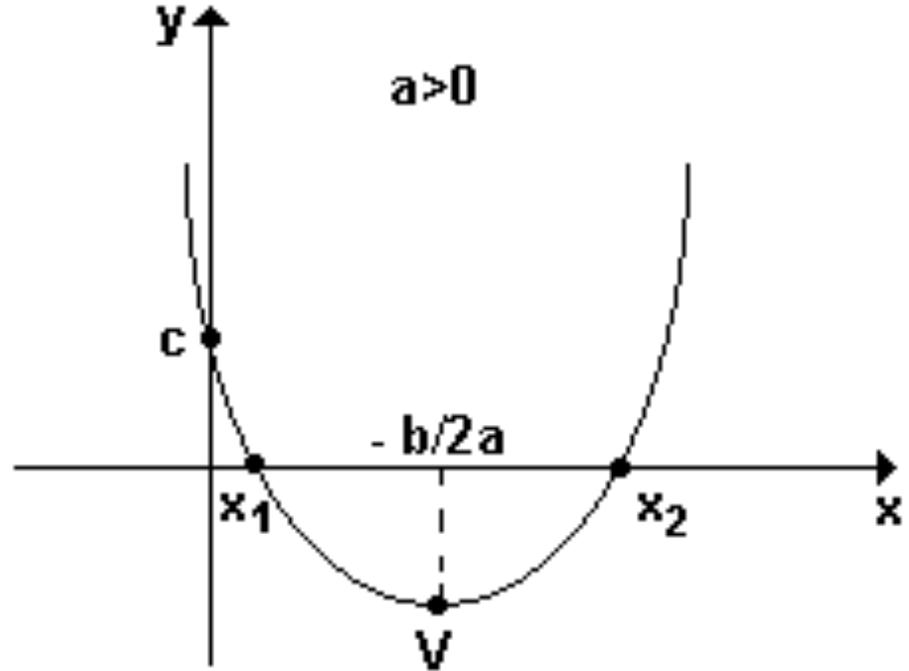


Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Valores de Máximo e Mínimo

- Se $a > 0$, a parábola tem um ponto de **mínimo** e com concavidade voltada para **cima**.

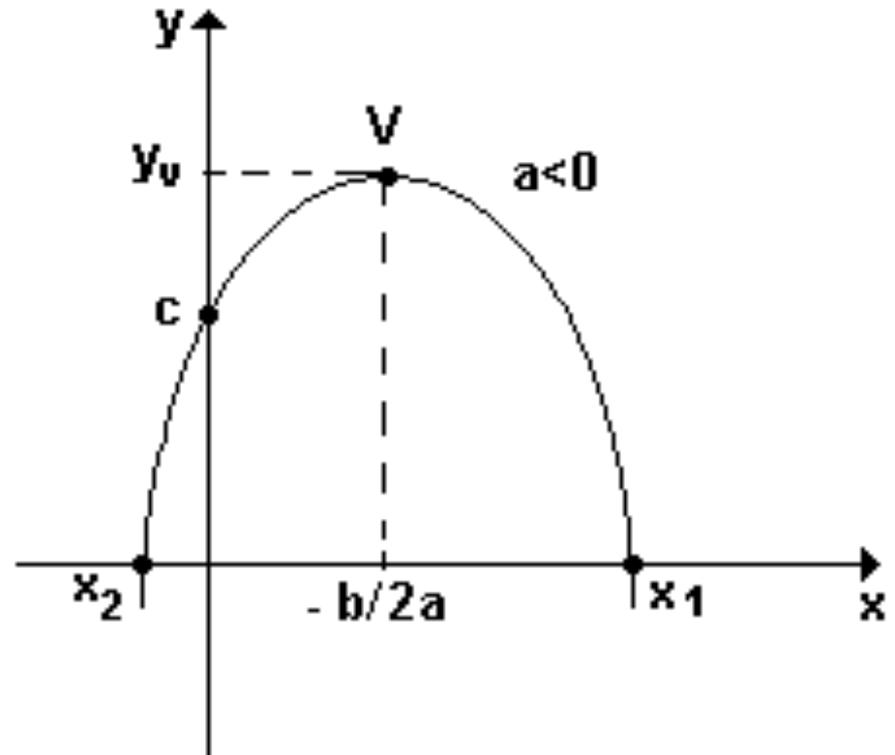


Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Quadrática ou do 2º grau

Valores de Máximo e Mínimo

- Se $a < 0$ a parábola tem um ponto de **máximo** e com concavidade voltada para **baixo**.



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Modular

É aquela que associa a cada elemento x real um elemento $|x|$.

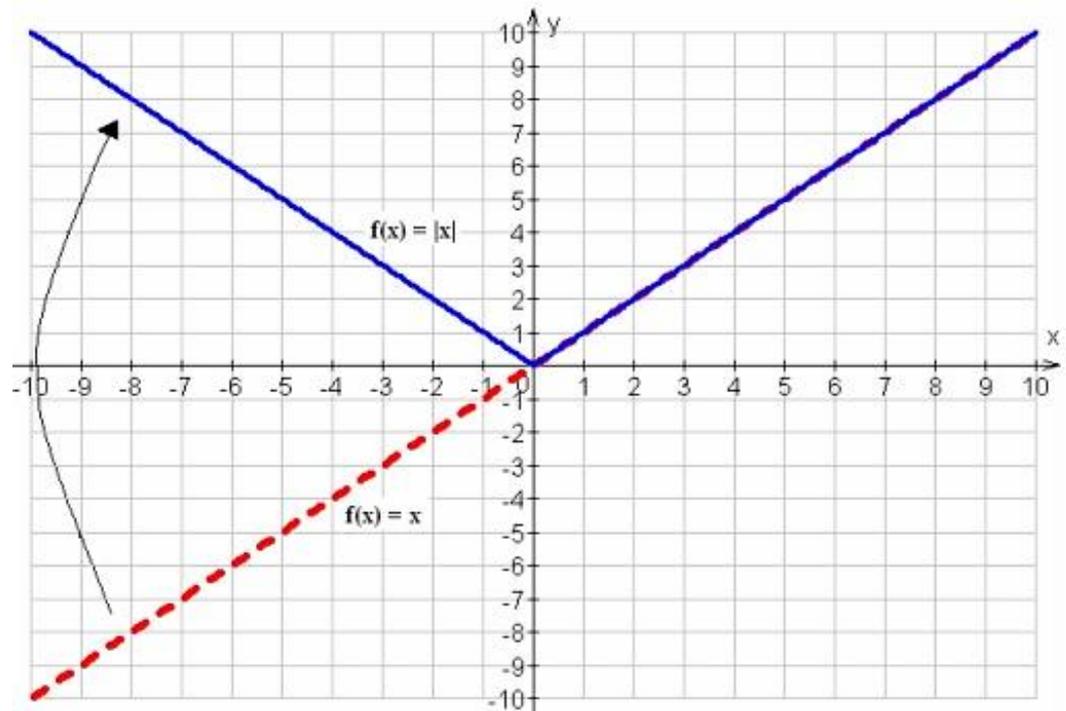
Adotamos a notação de uma função $f(x) = |x|$, como sendo:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Modular

O gráfico de $f(x) = |x|$ é semelhante ao gráfico de $f(x) = x$, sendo que a parte negativa do gráfico será “refletida” sempre para um $f(x)$ positivo.



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Modular

Função modular do 2º grau

Exemplo: $f(x) = |x^2 - 4|$

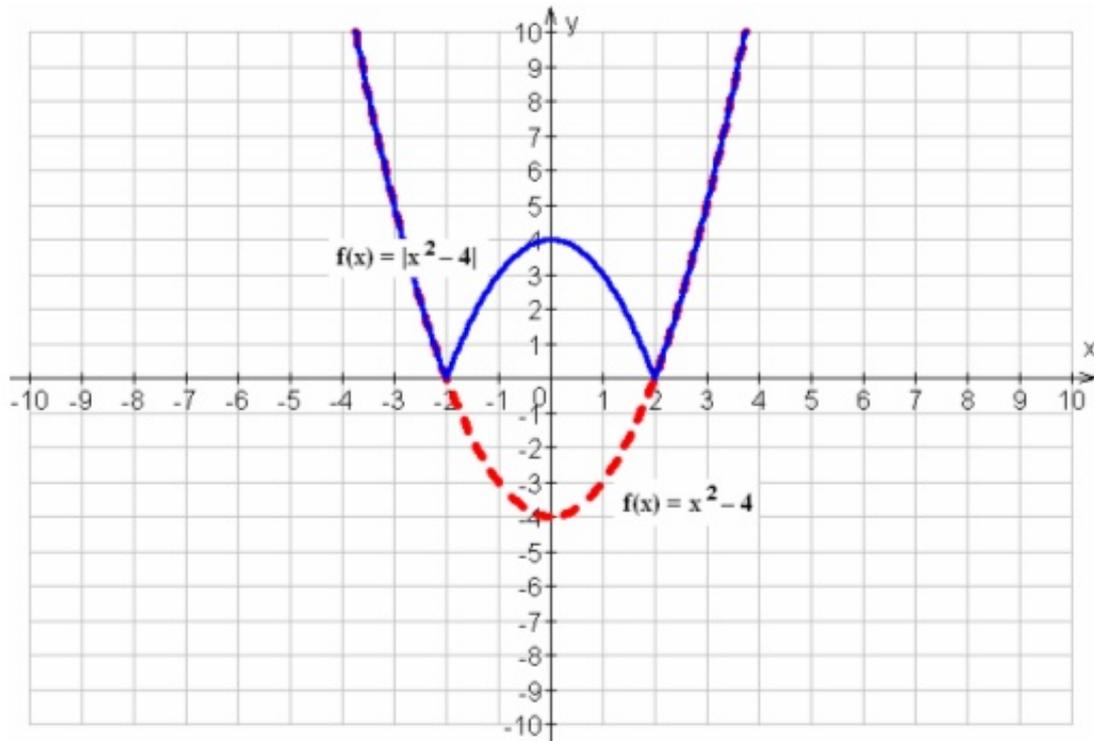
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 + 4, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Modular

Função modular do 2º grau

Exemplo: $f(x) = |x^2 - 4|$



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Exponencial

Potência de expoente natural

Sendo **a** um número real e um número natural **$n \geq 2$** , chama-se **potência de base a e expoente n** o número **a^n** que é o produto de n fatores iguais a a .

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Então: **$a^2 = a \cdot a$** , **$a^3 = a \cdot a \cdot a$** , **$a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$**

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Exponencial

Exemplos:

- $2^3 = 8$
- $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
- $(1/3)^3 = (1/3) \cdot (1/3) \cdot (1/3) = 1/27$
- $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
- $5^1 = 5$
- $(-2)^1 = -2$
- $4^0 = 1$
- $(-9)^0 = 1$

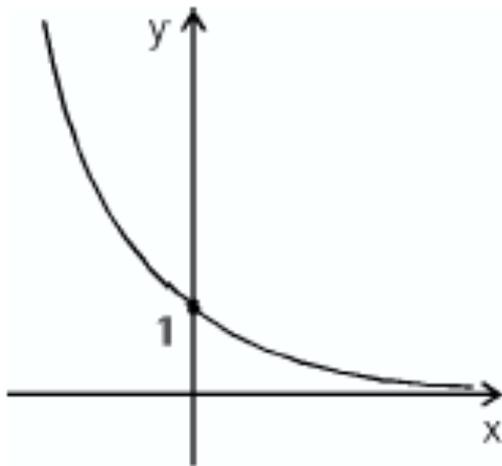
Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Exponencial

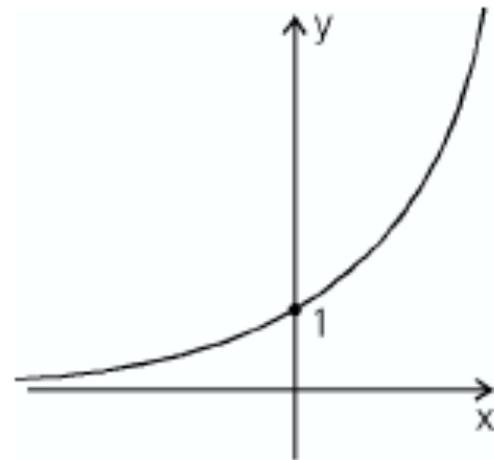
Chama-se função exponencial qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

- Representação gráfica da Função Exponencial

$0 < a < 1$ (função decrescente)



$a > 1$ (função crescente)



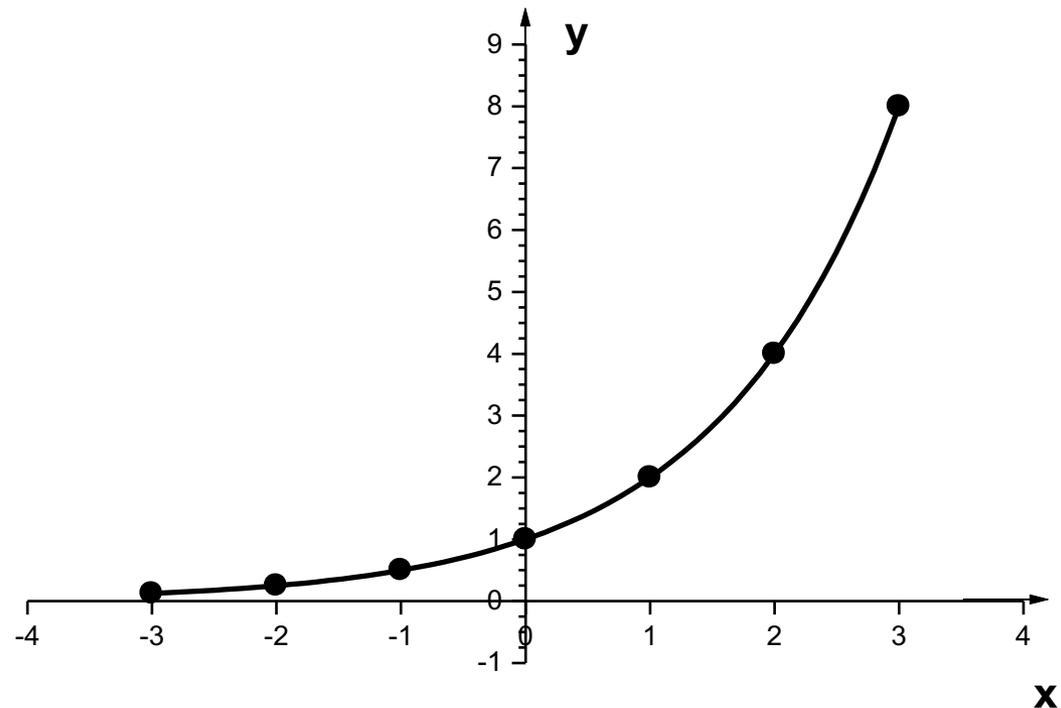
Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Exponencial

- Para base $a > 1$, a função é crescente.

Exemplo: $f(x) = 2^x$

x	f(x) = 2 ^x
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



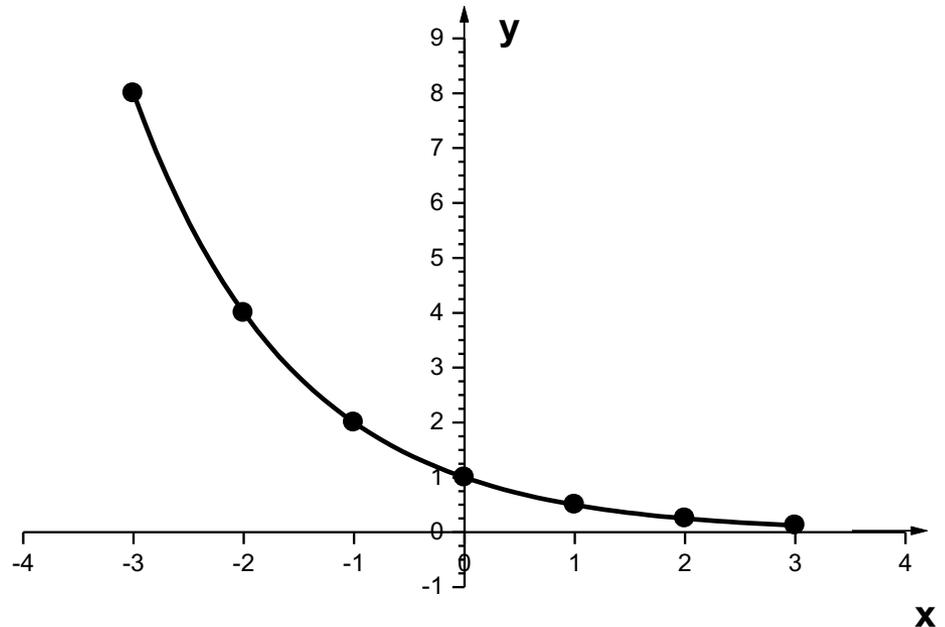
Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Exponencial

- Para base $0 < a < 1$, a função é **decrecente**.

Exemplo: $f(x) = (1/2)^x$

x	$f(x) = (1/2)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função Logarítmica

Logaritmos - Introdução

Os logaritmos constituem um tema muito importante para a matemática e em outras áreas do conhecimento.

Na química, por exemplo, é utilizado quando se quer medir a acidez de uma solução. Os ácidos são substâncias que, quando dissolvidas em água, produzem íons H^+ . Quanto maior a quantidade desses íons num determinado volume de solução, maior será sua acidez.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Logaritmos - Introdução

A acidez da solução é definida por uma grandeza chamada pH (potencial hidrogênio), que é simétrico ao logaritmo de H^+ , ou seja:

$$\text{pH} = - \log H^+$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Logaritmos

Definição de logaritmo - Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se **logaritmo de b na base a** o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b :

Onde:

a é a **base do logaritmo**

b é o **logaritmando**

x é o **logaritmo**

$$\log_a b = x \quad \rightarrow \quad a^x = b$$
$$(1 \neq a > 0, b > 0)$$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Logaritmos

$$\log_a b = x \rightarrow a^x = b$$
$$(1 \neq a > 0, b > 0)$$

Exemplos:

$$\bullet \log_2 4 = x \rightarrow 2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x=2$$

$$\bullet \log_3 81 = x \rightarrow 3^x = 81 \rightarrow 3^x = 3^4 \rightarrow x=4$$

$$\bullet \log_2 1/8 = x \rightarrow 2^x = 1/8 \rightarrow 2^x = 1/2^3 \rightarrow 2^x = 2^{-3} \rightarrow x = -3$$

$$\bullet \log_7 7 = x \rightarrow 7^x = 7 \rightarrow 7^x = 7^1 \rightarrow x=1$$

Propriedades do logaritmo

- Logaritmo do produto

“Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual a soma dos logaritmos dos números”.

$$\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$$

$$(1 \neq a > 0, x > 0 \text{ e } y > 0)$$

Exemplo: $\log_{10} (2.3) = \log 2 + \log 3$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Propriedades do logaritmo

- Logaritmo de quociente

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$(1 \neq a > 0, x > 0 \text{ e } y > 0)$$

Exemplo: $\log_{10} (4/5) = \log 4 - \log 5$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Propriedades do logaritmo

- Logaritmo de potência

$$\log_a x^m = m \cdot \log_a x$$

$$(1 \neq a > 0, x > 0 \text{ e } m \in \mathbb{R})$$

Exemplo: $\log_{10} 5^3 = 3 \cdot \log 5$

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Função logarítmica

A função $f: \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \log_a x$, com $1 \neq a > 0$ é chamada **função logarítmica de base a**.

Exemplos:

- $f(x) = \log_2 x$ é função logarítmica de base 2.
- $f(x) = \log_{1/2} x$ é função logarítmica de base 1/2.
- $f(x) = \log_{10} x$ é função logarítmica de base 10.

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Gráfico da função logarítmica

Temos dois casos a considerar:

• Quando $a > 1$:

Exemplo: $y = \log_2 x \rightarrow a > 1$

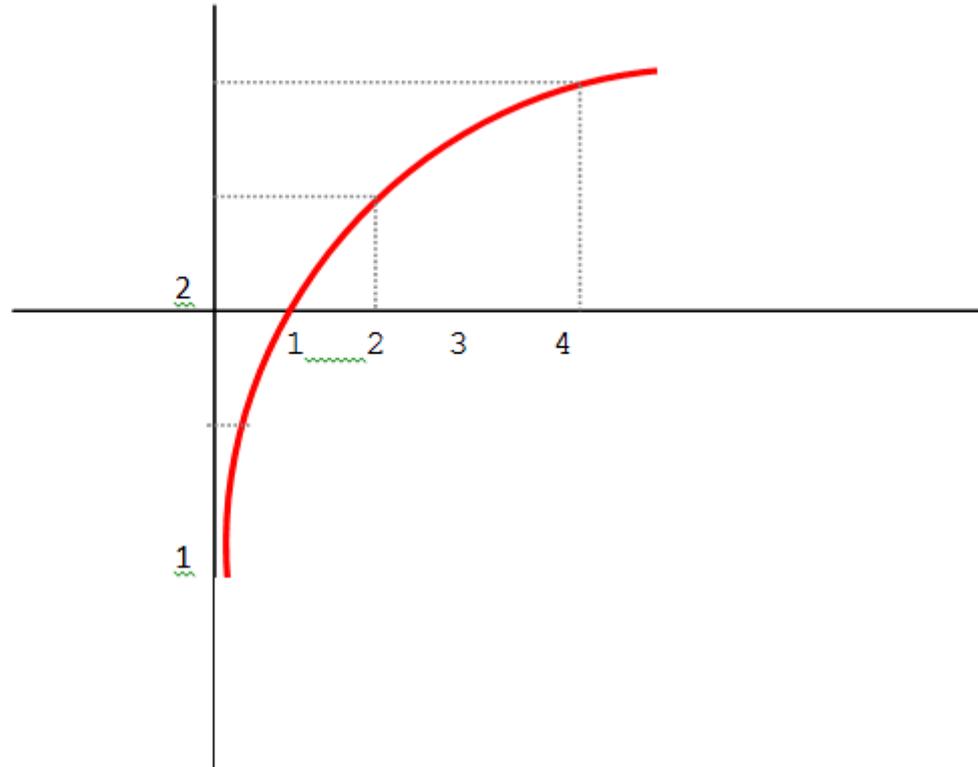
X	$\log_2 x = y$	Y
1/4	$2^y = 1/4 \rightarrow 2^y = 2^{-2} \rightarrow y = -2$	-2
1/2	$2^y = 1/2 \rightarrow 2^y = 2^{-1} \rightarrow y = -1$	-1
1	$2^y = 1 \rightarrow 2^y = 2^0 \rightarrow y = 0$	0
2	$2^y = 2 \rightarrow 2^y = 2^1 \rightarrow y = 1$	1
4	$2^y = 4 \rightarrow 2^y = 2^2 \rightarrow y = 2$	2

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Gráfico da função logarítmica

Exemplo: $y = \log_2 x \rightarrow a > 1$

X	Y
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Gráfico da função logarítmica

Temos dois casos a considerar:

• Quando $0 < a < 1$

Exemplo: $y = \log_{1/2} x \rightarrow 0 < a < 1$

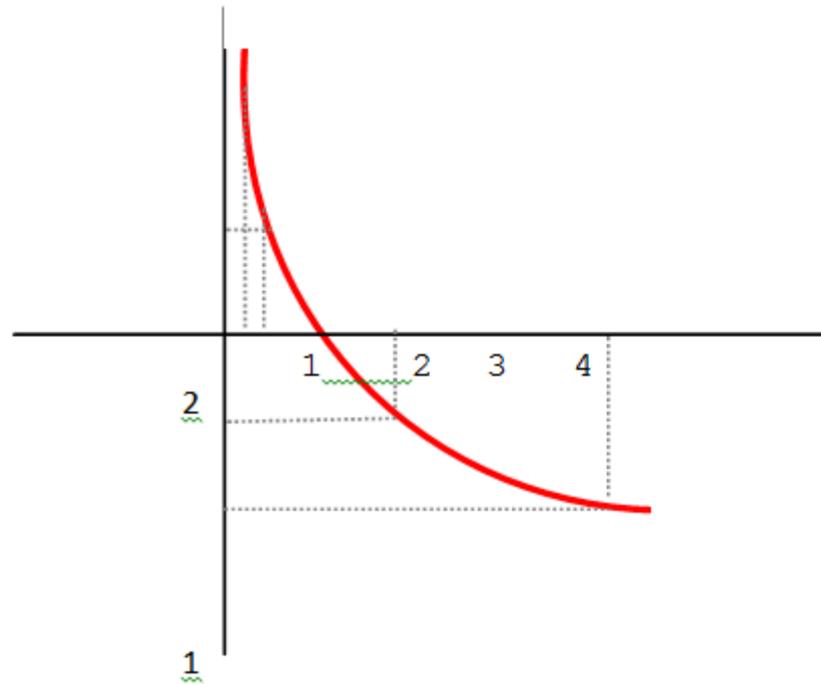
X	$\text{Log}_{1/2} x = y$	Y
1/4	$(1/2)^y = 1/4 \rightarrow 2^{-y} = 2^{-2} \rightarrow y = 2$	2
1/2	$(1/2)^y = 1/2 \rightarrow 2^{-y} = 2^{-1} \rightarrow y = 1$	1
1	$(1/2)^y = 1 \rightarrow 2^{-y} = 2^0 \rightarrow y = 0$	0
2	$(1/2)^y = 2 \rightarrow 2^{-y} = 2^1 \rightarrow y = -1$	-1
4	$(1/2)^y = 4 \rightarrow 2^{-y} = 2^2 \rightarrow y = -2$	-2

Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Gráfico da função logarítmica

Exemplo: $y = \log_{1/2} x \rightarrow 0 < a < 1$

X	Y
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2



Tipos Especiais de Funções no Plano Cartesiano

Gráfico da função logarítmica

Observações:

- Nos dois exemplos, podemos observar que **o gráfico não intercepta o eixo vertical.**
- O gráfico corta o eixo horizontal no ponto $(1,0)$. **A raiz da função é $x = 1$.**
- y assume todos os valores reais.