Conjuntos Contáveis e Não Contáveis / Contagem

Introdução

A história nos mostra que desde muito tempo o homem sempre teve a preocupação em contar objetos e ter registros numéricos. Seja através de pedras, ossos, desenhos, dos dedos ou outra forma qualquer, em que procurava abstrair a natureza por meio de processos de determinação de quantidades.

Introdução

Essa procura pela abstração da natureza foi fundamental para a evolução, não só, mas também, dos conjuntos numéricos. E é sobre eles a aula de hoje.

Conjunto do números Naturais - N

Como decorrência da necessidade de contar objetos surgiram os números naturais que é simbolizado pela letra **N** e é formado pelos números 0, 1, 2, 3, …, ou seja:

$$\mathbf{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

Conjunto do números Naturais - N

O conjunto N pode ser representado geometricamente por meio de uma reta numerada:

Um ponto de origem (correspondente ao número zero)

uma orientação (geralmente para a direita)

Conjunto do números Naturais - N

Um subconjunto de **N** muito usado é o conjunto dos números naturais menos o zero, ou seja:

N– {0} = conjuntos dos números naturais positivos, que é representado por **N***:

$$\mathbf{N^{*}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}}$$

Conjunto do números Naturais - N

Outros subconjuntos:

- O conjunto dos números naturais pares:

$$N_p=\{0, 2, 4, 6, ..., 2n, ...\} \quad n \in N$$

- O conjunto dos números naturais ímpares:

$$N_i=\{1, 3, 5, 7, ..., 2n+1, ...\} \quad n \in N$$

Conjunto do números Naturais - N

Outros subconjuntos:

- O conjunto dos números primos:

$$\mathbf{P_i=\{2, 3, 5, 7, 11, 13 \ldots\}}$$

Conjunto do números Naturais - N

Operações:

No conjunto dos números naturais estão definidas duas operações: adição e multiplicação.

se **a** e **b** são dois números naturais, então:

a + b e **a.b** → são também números naturais.

Conjunto do números Naturais - N

Operações: adição e multiplicação

➡ Em símbolos:

$\forall$ m,n $\in$ N, (m+n) $\in$ N e (m*n) $\in$ N

→ Para todo m e n que pertencem a N, m + n pertence a N e m . n pertence a N.

Conjunto dos Números Inteiros – Z

Chama-se o conjunto dos números inteiros, representado pela letra **Z**, o seguinte conjunto:

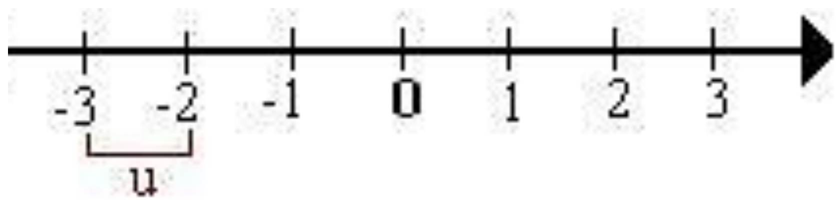
$$Z = \{\ldots, -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

Introdução dos números negativos!

Conjunto dos Números Inteiros – Z

Os números inteiros podem ser representados por pontos de uma reta orientada ou eixo, onde temos um ponto de origem, o zero, e à sua esquerda associam-se ordenadamente os inteiros negativos e à sua direita os inteiros positivos, separados por intervalos de mesmo comprimento.

Conjunto dos Números Inteiros – Z



Cada ponto da reta orientada é denominado de abcissa

Conjunto dos Números Inteiros – Z

Módulo ou valor absoluto:

Em **Z** podemos introduzir o conceito de <u>módulo ou valor absoluto:</u>

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0 \text{ e } |x| = -x \text{ se } x < 0,$$

para todo **x** pertencente a **Z**.

Como decorrência da definição temos que $|x| \geq 0$ para qualquer número inteiro.

Conjunto dos Números Inteiros – Z

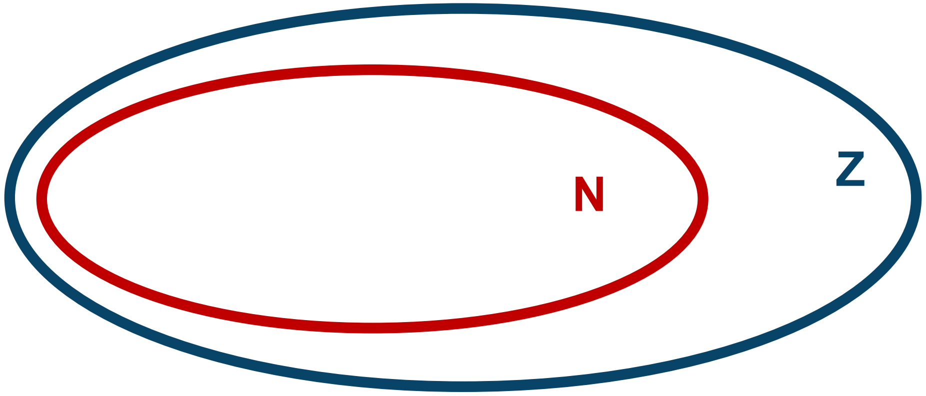
Módulo ou valor absoluto:

Exemplo:

- **Quando $x = 2$, $|2| = 2$;**
    - **Quando $x = -2$, $|-2| = 2$**

Conjunto dos Números Inteiros – Z

Todos os elementos de N pertencem também a Z, o que vale dizer que N é subconjunto de Z:



Conjunto dos Números Inteiros – Z

No conjunto **Z** distinguimos alguns subconjuntos notáveis que possuem notação própria para representá-los:

- Conjunto dos inteiros não negativos:

$$\mathbf{Z_+ = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}}$$

- Conjunto dos inteiros não positivos:

$$\mathbf{Z_- = \{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0\}}$$

Conjunto dos Números Inteiros – Z

- Conjunto dos inteiros não nulos:

$$Z^* = \{\ldots, -3; -2; -1; 1; 2; 3; \ldots\}$$

- Conjunto dos inteiros positivos:

$$Z_+^* = \{1; 2; 3; \ldots\}$$

- Conjunto dos inteiros negativos:

$$Z_-^* = \{\ldots; -3; -2; -1\}$$

Conjunto dos Números Inteiros – Z

Operações:

Além das operações de soma e multiplicação definas para N, podemos definir a operação de subtração em **Z**:

a – b = a + (-b) → para todo a e b pertencente a Z

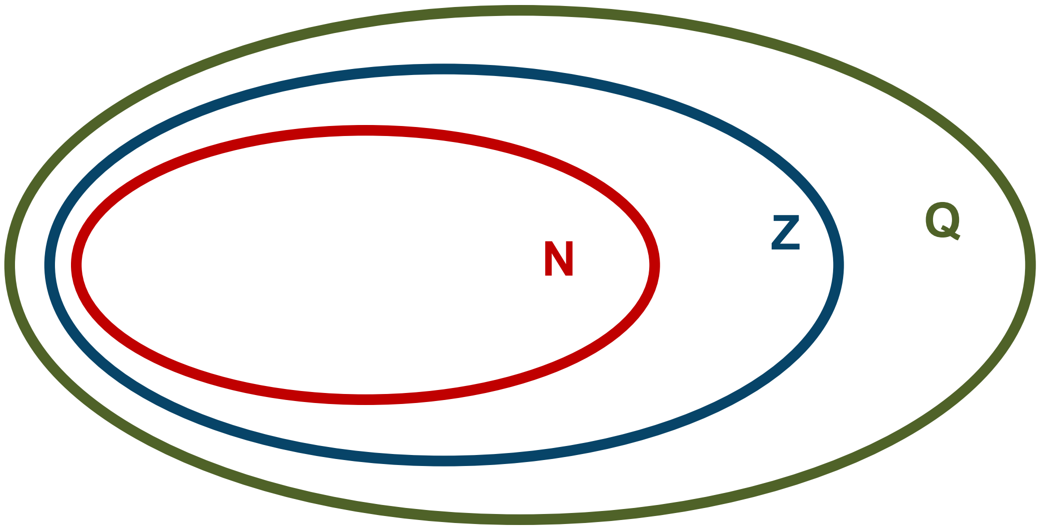
Conjunto dos Números Racionais – Q

O conjunto dos números racionais, simbolizado pela letra **Q**, é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de uma fração p/q, com **p** e **q** inteiros quaisquer e **q** diferente de zero:

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Conjunto dos Números Racionais – Q

Como todo número inteiro pode ser escrito na forma **p/1**, então **Z** é um subconjunto de **Q**.



Conjunto dos Números Racionais – Q

Para o conjuntos dos números racionais também valem as notações:

- **Q*** (conjunto dos números racionais não nulos),
- **Q_+** (conjunto dos números racionais não negativos) e
- **Q_-** (conjunto dos números racionais não positivos).

Conjunto dos Números Racionais – Q

Todo número racional p/q pode ser escrito como um número decimal exato ou como uma dízima periódica.

Exemplos:

- 1/2 = 0,5
  - 1/3 = 0,333…
    - 1/4 = 0,25

Conjunto dos Números Irracionais – I

Os números irracionais são decimais infinitas não periódicas, ou seja, os números que não podem ser escritos na forma de fração (divisão de dois inteiros).

Exemplos:

- O número 0,212112111... não é dízima periódica, pois os algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.

Conjunto dos Números Irracionais – I

Exemplos:

- O número 0,203040... também não comporta representação fracionária, pois não é dízima periódica.

- Os números π = 3,1415926535..., $\sqrt{2}$ =1,4142136, $\sqrt{3}$ =1,7320508, por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais.

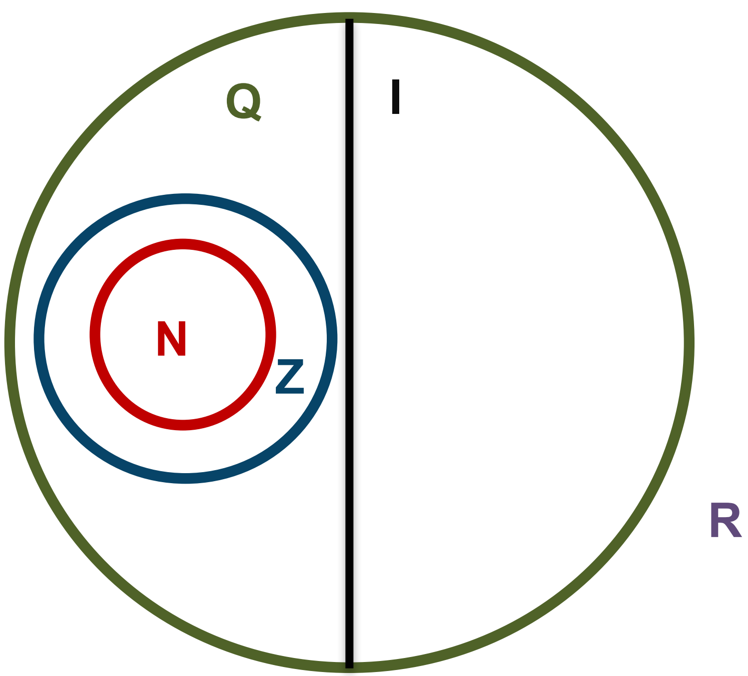
Conjunto dos Números Reais – R

O conjunto dos números reais, simbolizado pela letra **R**, é o formado por todos os números racionais e por todos os números irracionais:

R = {x | x é racional ou x é irracional}

Conjunto dos Números Reais – R

Desse modo todos os conjuntos numéricos (**N**, **Z** e **Q**), bem como o conjunto dos números irracionais são subconjuntos de **R**.



Conjunto dos Números Reais – R

Além desses (**N, Z, Q, I**), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

•$\mathbf{R}^*$ = $\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$ - conjunto dos números reais não nulos

•$\mathbf{R}_+$ = $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$ - conjunto dos números reais não negativos

•$\mathbf{R}$ = $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ - conjunto dos números reais positivos

Conjunto dos Números Reais – R

•**R-** $=\{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 0\}$ - conjunto dos números reais não positivos

•**R** $= \{x \in \mathbf{R} \mid x < 0\}$ - conjunto dos números reais negativos

Cardinalidade de um Conjunto

Define-se a cardinalidade de um conjunto A como ao número de elementos que pertencem ao conjunto A .

Denotamos a cardinalidade de um conjunto A por card(A) ou o(A) , e se lê “cardinalidade de A” ou “número de elementos de A”.

Cardinalidade de um Conjunto

Exemplos:

- Seja o conjunto A = { 1, 0, 3 } , então o(A) = 3
- Seja B = { -1, 0, 1, 3, 8 } então o(B) = 5
- Seja A = { } , então o(A) = 0
- Seja A = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , n } , então o(A) = n
- Seja A = { Φ } , então o(A) = 1

Cardinalidade de um Conjunto

Exemplos:

- Seja o conjunto $A = \{ 1, 0, 3 \}$, então $o(A) = 3$
- Seja $B = \{ -1, 0, 1, 3, 8 \}$ então $o(B) = 5$
- Seja $A = \{ \}$, então $o(A) = 0$
- Seja $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , n \}$, então $o(A) = n$
- Seja $A = \{ \Phi \}$, então $o(A) = 1$

Princípio da Adição de Conjuntos

Um consumidor deseja comprar um veículo em uma concessionária, onde tem 18 automóveis de passeio e 15 utilitários. Calcule quantas escolhas possíveis o consumidor tem.







Princípio da Adição de Conjuntos

O consumidor pode escolher um automóvel de passeio ou um utilitário.

O conjunto automóveis de passeio não possui nenhum elemento comum com o conjunto automóveis utilitários, ou seja, são disjuntos.

Neste caso, pelo princípio da adição, a escolha de um veículo tem 18 + 15 = 33 possibilidades.

Princípio Multiplicação

Uma lanchonete oferece a seus clientes apenas dois tipos de sanduíches: hot dog e hambúrger.

Como sobremesa, há três opções: sorvete, torta ou salada de frutas.

Pergunta-se: quantas são as possibilidades de uma pessoa fazer uma refeição incluindo **um sanduíche e uma sobremesa?**

Princípio Multiplicação

Podemos listar as possibilidades:

- **Hambuguer + Sorvete**
- **Hambuguer + torta**
- **Hambuguer + salada**
- **Hot dog + Sorvete**
- **Hot dog + torta**
- **Hot dog + salada**

Princípio Multiplicação

A determinação de tais possibilidades pode ser simplificada através de um diagrama, em que, na 1ª coluna, representaremos as possibilidades de escolha do sanduíche e, na 2ª coluna, as possibilidades de escolha da sobremesa.

Conjuntos Contáveis e Não Contáveis/Contagem

Princípio Multiplicação

1ª opção	2ª opção	
hot dog	sorvete	→ refeição 1
	torta	→ refeição 2
	salada de frutas	→ refeição 3
hamburger	sorvete	→ refeição 4
	torta	→ refeição 5
	salada de frutas	→ refeição 6

Princípio Multiplicação

Este esquema é conhecido como **diagrama de árvore**. Fazendo a leitura de todas as “ramificações” da árvore, obtemos as possíveis refeições.

Princípio Fundamental da Contagem - PFC

Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas.

- A primeira etapa pode ser realizada de *p* maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de *q* maneiras distintas.

Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por *p x q*.

Princípio Fundamental da Contagem - PFC

Este princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas.

Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo: Um número de telefone é uma seqüência de 8 dígitos, mas o primeiro dígito deve ser diferente de 0 ou 1. Quantos números de telefone distintos existem?

Princípio Fundamental da Contagem

Para cada dígito temos a possibilidade de 10 números, com exceção do 1º, onde só poderão existir 8 números:

X X X X – X X X X

8.10.10.10 – 10.10.10.10

Assim: $8.\underbrace{10 \ldots 10}_{\text{7 vezes}} = 8.10^7$

Princípio Fundamental da Contagem

Se um determinado evento ocorre em várias etapas sucessivas e independentes, onde:

$P1$ é o número de possibilidades de ocorrer a 1ª etapa,

$P2$ o número de possibilidades de ocorrer a 2ª etapa,

$P3$ o número de possibilidades de ocorrer a 3ª etapa,

Pn o número de possibilidades de ocorrer a n-ésima etapa

Princípio Fundamental da Contagem

O número total de possibilidades de ocorrer esse evento é dado por

$$P = P1 \,.\, P2 \,.\, P3 \,.\, \ldots \,.\, Pn$$

Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo: Qual o número máximo de veículos que poderá ser licenciado no Brasil, sabendo que as placas dos veículos possuem 3 letras e 4 algarismos?

Princípio Fundamental da Contagem

Placa: L1 L2 L3 N1 N2 N3 N4

Para cada letra temos 26 possibilidades (26 letras do alfabeto) e para cada número 10 possibilidades (0-9).

L1 L2 L3 N1 N2 N3 N4

26 . 26 . 26 . 10 . 10 . 10 . 10=

= 175.760.000 placas diferentes = número máximo de veículos

Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo: A mãe de uma criança permitiu que esta comprasse uma bala e um chiclete. Chegando à loja, a criança viu que existiam balas nas cores rosa e azul e, ainda, chicletes nas cores amarela, verde e vermelha.

Quantos conjuntos diferentes formados por uma bala e um chiclete, a criança pode escolher?

Princípio Fundamental da Contagem

Teremos que formar conjuntos de uma bala e um chiclete. Podemos utilizar diferentes maneiras:

<table>
<tr><th>CHICLETES</th><th>BALAS</th></tr>
<tr><td>AMARELO</td><td>ROSA</td></tr>
<tr><td>VERDE</td><td rowspan="2">AZUL</td></tr>
<tr><td>VERMELHO</td></tr>
<tr><td>3 possibilidades</td><td>2 possibilidades</td></tr>
</table>

3 x 2 =

= 6

Princípio Fundamental da Contagem

Podemos utilizar o diagrama de árvores:

1 – Escolha da bala:

2 – Escolha do chiclete:

Rosa

Verde Amarelo Vermelho

Azul

Verde Amarelo Vermelho

Princípio Fundamental da Contagem

Rosa

Verde Amarelo Vermelho

(R,V) (R,A) (R,Vo)

Azul

Verde Amarelo Vermelho

(A,V) (A,A) (A,Vo)

Princípio da casa dos Pombos

Teorema : Se n + 1 pombos voam em direção a n casas e todos os pombos entram em uma casa, haverá pelo menos uma casa com pelo menos dois pombos.

Princípio da casa dos pombos

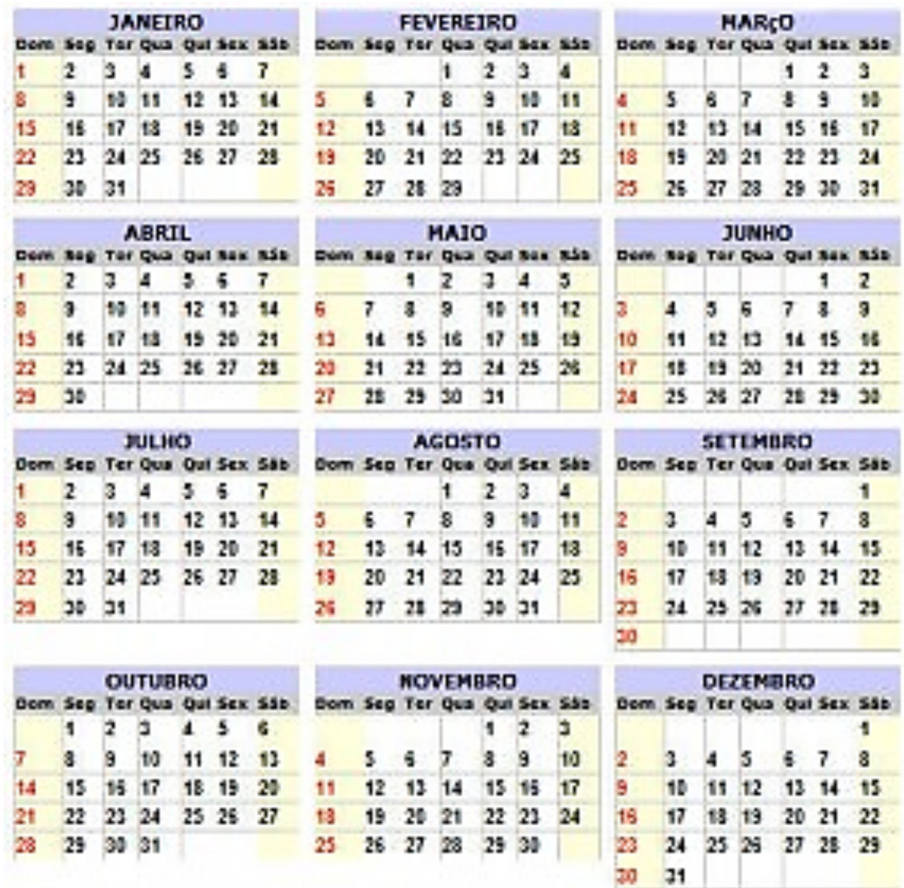
<u>Exemplo</u>: Em uma festa com <u>mais</u> de 12 crianças, há pelo menos duas que nasceram no mesmo mês.

Princípio da casa dos pombos

Pelo teorema: Se uma criança nasce em cada mês do ano, teremos 12 crianças, pois temos 12 meses no ano. Para que existam duas que nasceram no mesmo mês, terão que existir <u>mais</u> que 12 crianças!

Princípio da casa dos pombos

<u>Exemplo</u>: Entre um grupo de 367 pessoas, pelo menos duas possuem o mesmo dia de nascimento, pois existem apenas 366 possibilidades.



Princípio da casa dos pombos

Exemplo: Em uma festa de aniversário com 37 crianças, no mínimo, quantas nasceram no mesmo mês?

- Número de meses: 12 **(casas)**
- Distribuindo as crianças **(pombos)**:

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
1	1	1	1	1	1
Jul	**Ago**	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**
1	1	1	1	1	1

12 crianças

Princípio da casa dos pombos

- Distribuindo as crianças: +12. Total = 24

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
2	2	2	2	2	2
Jul	**Ago**	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**
2	2	2	2	2	2

Princípio da casa dos pombos

- Distribuindo as crianças: +12. Total = 36

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
3	3	3	3	3	3
Jul	**Ago**	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**
3	3	3	3	3	3

Princípio da casa dos pombos

- Distribuindo as crianças: +1. Total = 37

Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
4	3	3	3	3	3
Jul	**Ago**	**Set**	**Out**	**Nov**	**Dez**
3	3	3	3	3	3

No mínimo, 4 crianças nasceram no mesmo mês!

Princípio da casa dos pombos

- Generalizando:
  - 37 crianças
  - 12 meses

37/12 = 3 com resto 1

= 4

Princípio da casa dos pombos

- <u>Exemplo:</u> Em um grupo de 20 pessoas, pelo menos quantas nasceram no mesmo dia da semana?

- 20 Pessoas (pombos)
- 7 dias da semana (casas)

$$20/7 = 2 \text{ com resto seis}$$

Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab	Dom
2	2	2	2	2	2	2

+6

Princípio da casa dos pombos

Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab	Dom
2+1	2+1	2+1	2+1	2+1	2+1	2

Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab	Dom
3	3	3	3	3	3	2

No mínimo, 3 pessoas nasceram no mesmo dia!

Princípio da casa dos pombos

Exemplo: Se uma urna contem 4 bolas vermelhas, 7 verdes, 9 azuis e 6 amarelas, qual é o menor número de bolas que devemos retirar (sem olhar) par a que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 3 bolas da mesma cor?

- Bolas (pombos)
- 4 Cores (casas)

Princípio da casa dos pombos

Cor 1	Cor 2	Cor 3	Cor 4
1	1	1	1
1	1	1	1
1			

9 bolas!