

Análise Combinatória

Análise Combinatória

Introdução

Análise combinatória



PROBLEMAS DE CONTAGEM

Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo: Um número de telefone é uma seqüência de 8 dígitos, mas o primeiro dígito deve ser diferente de 0 ou 1. Quantos números de telefone distintos existem?



Princípio Fundamental da Contagem

Para cada dígito temos a possibilidade de 10 números, com exceção do 1º, onde só poderão existir 8 números:

X X X X – X X X X

8.10.10.10 – 10.10.10.10

Assim: $8. \underbrace{10 \dots 10}_{7 \text{ vezes}} = 8.10^7$



Princípio Fundamental da Contagem

Se um determinado evento ocorre em várias etapas sucessivas e independentes, onde:

P_1 é o número de possibilidades de ocorrer a 1ª etapa,

P_2 o número de possibilidades de ocorrer a 2ª etapa,

P_3 o número de possibilidades de ocorrer a 3ª etapa,

P_n o número de possibilidades de ocorrer a n-ésima etapa

Princípio Fundamental da Contagem

O número total de possibilidades de ocorrer esse evento é dado por

$$P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n$$

ARRANJO SIMPLES

Dado um conjunto com n elementos distintos, chama-se arranjo dos n elementos, tomados p a p , a qualquer seqüência ordenada de p elementos distintos, escolhidos entre os n existentes.

ARRANJO SIMPLES

Temos um Arranjo quando os agrupamentos conseguidos ficam diferentes ao se inverter a posição dos seus elementos.



ARRANJO SIMPLES

Exemplo: Se, por exemplo, de um grupo de oito (8) pessoas, devemos dispor cinco (5) delas em fila. De quantos modos podemos realizar tal processo?

$$\frac{8}{1} \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1}$$



ARRANJO SIMPLES

Obteremos $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$ possibilidades de filas com cinco pessoas

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \\ 8 & \times & 7 & \times & 6 & \times & 5 & \times & 4 \end{array} = 6720$$

Representação: $A_{8,5}$ ou $A^8_5 \rightarrow$ Arranjo 8 elementos tomados 5 a 5.

ARRANJO SIMPLES

Podemos fazer o cálculo do arranjo utilizando os conceitos de fatorial:

$$A_{8,5} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{8!}{(8-5)!}$$

$$A_{8,5} = \frac{8.7.6.5.4.3.2}{3.2} = 8.7.6.5.4 = 6720$$

ARRANJO SIMPLES

De maneira geral, temos que um arranjo de n elementos tomados de K a K é igual a:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

ARRANJO SIMPLES

Exemplo: Quantos números de três dígitos distintos escolhidos entre 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, podemos formar?



ARRANJO SIMPLES

Isto significa que temos um arranjo de 7 elementos tomados de 3 a 3.

Assim,

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$A_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7.6.5.4!}{4!} = 7.6.5 = 210$$



ARRANJO SIMPLES

Exemplo: Um grupo de pessoas é formado por cinco homens e três mulheres. Deseja-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as **três mulheres ocupem sempre**

as três primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem essa restrição?



ARRANJO SIMPLES

Mulheres: arranjo de três mulheres tomado de 3 a 3.



$$A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3.2.1 = 6$$

OBS: $0! = 1$

ARRANJO SIMPLES

Homens: arranjo de cinco homens tomado de 2 a 2.



$$A_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 20$$

ARRANJO SIMPLES



**Possibilidades de
arranjos para as mulheres**



**Possibilidades de
arranjos para os homens**

ARRANJO SIMPLES

Resposta:

$$A_{3,3} \times A_{5,2}$$

$$= 6 \times 20 = 120 \text{ filas possíveis!}$$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Permutações simples é uma técnica combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de uma fila ou seqüência em que **não há repetição de elementos e todos esses elementos são utilizados no problema.**

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Exemplo: com os algarismos 1, 2 e 3, quantos números de três algarismos distintos (isto é, sem repetição) podemos formar?



<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>
<u>1</u>	<u>3</u>	<u>2</u>
<u>2</u>	<u>1</u>	<u>3</u>
<u>2</u>	<u>3</u>	<u>1</u>
<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>
<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>

PERMUTAÇÃO SIMPLES



Como os números não podem se repetir:

$$\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 3 & \times & 2 & \times & 1 \end{array} \quad 3 \times 2 \times 1 = 6$$



PERMUTAÇÃO SIMPLES

Podemos entender a permutação simples como sendo um caso do arranjo, onde $n=p$:

$$A_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3.2.1 = 6$$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

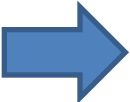
Generalizando:
$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Então, a permutação simples pode ser representada pela equação:

$$P_n = n!$$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Outro exemplo de contagem no qual lançamos mão da ferramenta permutação simples é a contagem do número de anagramas que podem ser formados com alguma palavra.

 Anagrama é um processo de troca de ordem das letras de uma palavra com o intuito de formar uma nova palavra (esta palavra formada pode ter sentido ou não).

Análise Combinatória

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Exemplo:

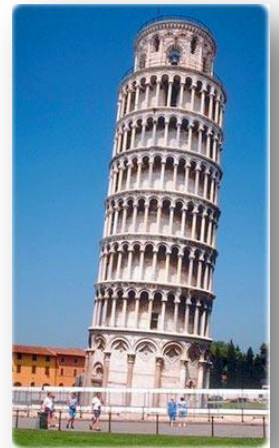
AMOR

ROMA

ORAM

MARO

etc.



Análise Combinatória

PERMUTAÇÃO SIMPLES

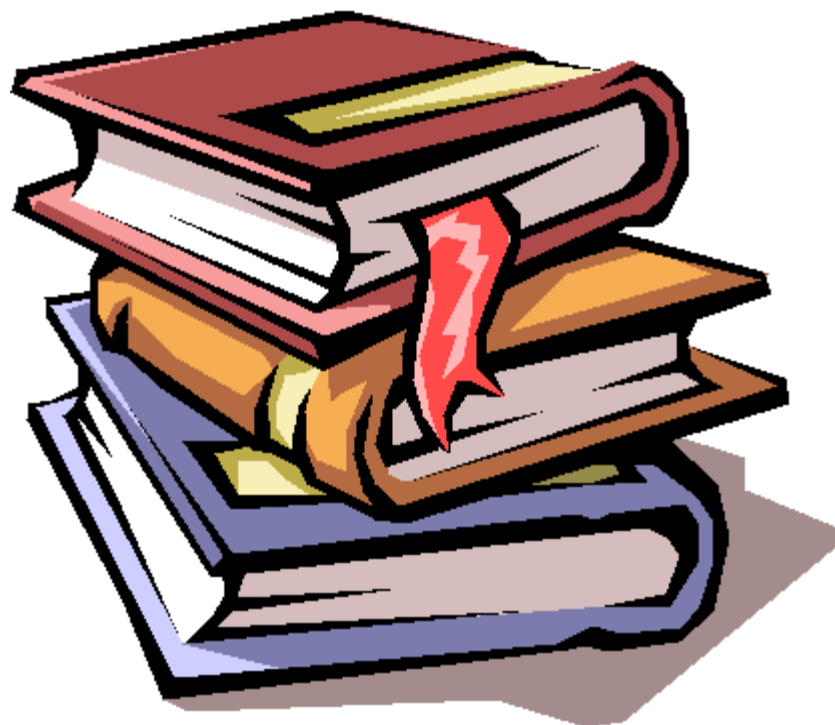
Como **AMOR** possui 4 letras:

$$P_4 = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

PERMUTAÇÃO SIMPLES

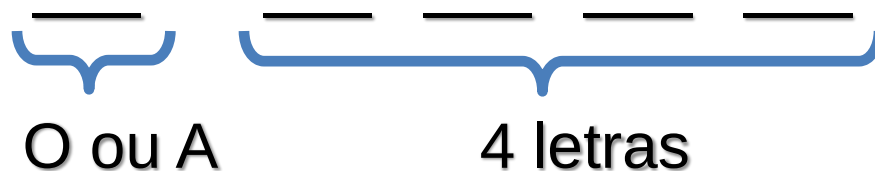
Exemplo: Quantos anagramas podem ser formados com a palavra **LIVRO**:
5 letras

$$P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 \\ = 120 \text{ anagramas}$$



PERMUTAÇÃO SIMPLES

Exemplo: Quantos anagramas podem ser formados com a palavra **LIVRO** começando com vogal?



$$2.P_4 = 2.4! = 2.4.3.2.1 = 48$$

PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Se entre os n elementos de um conjunto, existem a elementos repetidos, b elementos repetidos, c elementos repetidos e assim sucessivamente, o número total de permutações que podemos formar é dado por:

$$P_n^{(a,b,c,d,e...)} = \frac{n!}{a!b!c!d!e!...}$$

PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com a palavra **MISSISSIPPI**?

-11 letras no total;

-Repetições:

- 4 letras I
- 4 letras S
- 2 letras P

$$P_{11}^{(4,4,2)} = \frac{11!}{4!4!2!} = 34.650$$



PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

Exemplo: Qual o número de maneiras diferentes de colocar em uma linha de um tabuleiro de xadrez (8 posições) as peças brancas (2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, a rainha e o rei)?



PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS



8 posições no total

Repetições: 2 torres, 2 cavalos, 2 bispos

$$P_8^{(2,2,2)} = \frac{8!}{2!2!2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2}{2.2.2} = 5040$$

COMBINAÇÃO SIMPLES

Combinação simples é uma ferramenta combinatória utilizada quando desejamos contar as possibilidades de formação de um subgrupo de elementos a partir de um grupo dado.

 São as possibilidades de formação de um subconjunto formado a partir do conjunto dado.

Análise Combinatória

COMBINAÇÃO SIMPLES

A ORDENAÇÃO DOS ELEMENTO, NESTE CASO, NÃO TEM
IMPORTÂNCIA!



COMBINAÇÃO SIMPLES

Exemplo: Formar duplas com Pedro, João e Ana:

Pedro e Ana =
Ana e Pedro

Pedro e João =
João e Pedro

João e Ana =
Ana e João

SERÃO FORMADOS APENAS 3 DUPLAS!

COMBINAÇÃO SIMPLES

A partir de um conjunto com n elementos devem-se formar um subconjunto com p elementos. A quantidade de subconjuntos é igual a:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

COMBINAÇÃO SIMPLES

Exemplo: Dentre 9 Cd's distintos que estão em oferta em uma loja, João deseja escolher 5 para comprar. De quantos modos diferentes João pode escolher os 5 Cd's?



COMBINAÇÃO SIMPLES

CD1, CD2, CD3, CD4, CD5, CD6, CD7, CD8, CD9

Possibilidades:

CD1, CD2, CD3, CD4, CD5

CD1, CD2, CD3, CD4, CD6

CD1, CD2, CD3, CD4, CD7

CD1, CD2, CD3, CD4, CD8

CD1, CD2, CD3, CD4, CD9 etc...



COMBINAÇÃO SIMPLES

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{9,5} = \binom{9}{5}$$

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-5)!}$$

$$C_{9,5} = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9.8.7.6.5!}{5!4.3.2.1.} = 126 \text{ maneiras}$$



**grupo de 9 CD's
em conjuntos de 5 CD's**

