LÓGICA MATEMÁTICA

PROPOSIÇÕES SIMPLES E COMPOSTAS

Rafael D. Ribeiro, M.Sc.
rafaeldiasribeiro@gmail.com
http://www.rafaeldiasribeiro.com.br

Autora:
Prof. Dra. Denise Candal

Proposições

Definição: Chama-se **proposição** todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

Exemplo: Todo número divisível por 2 é par.

Princípios (ou axiomas) da Lógica Matemática

✓PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO:

Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

✓PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO:

Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro. (Lógica Bivalente)

Valor Lógico

Definição: Chama-se **valor lógico** de uma proposição a **verdade** (V) se a proposição é verdeira e a **falsidade** (F) se a proposição é falsa.

Toda proposição tem um, e um só, dos valores V ou F.

Proposição Simples

Definição: Chama-se **proposição simples** ou atômica aquela que não contém outra proposição como parte de si mesma.

Notação: letras latinas minúsculas (p,q,r,s,...)→ letras proposicionais

Exemplo: Maria é insuportável.

Proposição Composta

Definição: Chama-se **proposição composta** ou molecular aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

Notação: letras latinas maiúsculas (P,Q,R,S,...)→ letras proposicionais

Exemplo: Maria é insuportável e Pedro é irritante.

Conectivos

Definição: Chamam-se **conectivos** palavras que são utilizadas para formar novas proposições a partir de outras.

Os conectivos: não, e, ou, se...então, ...se e somente se ...

não	e	ou	Se...então	Se e somente se
~	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Tabela Verdade

Dispositivo usado para determinar o **valor lógico** de **proposições compostas** a partir dos **valores lógicos** das **proposições simples** que a constituem.

Proposição simples

p

Tabela Verdade

Dispositivo usado para determinar o **valor lógico** de **proposições compostas** a partir dos **valores lógicos** das **proposições simples** que a constituem.

Proposição simples

p
V
F

Tabela Verdade

Princípio: O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Proposição composta

p	*q*

Tabela Verdade

Princípio: O valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Proposição composta

p	*q*
V	*V*
V	*F*
F	*V*
F	*F*

Operações Lógicas

Negação

Chama-se negação da proposição *p,* e representamos por *~p* , a proposição que tem o valor lógico oposto de *p.*

p	~p
V	
F	

Operações Lógicas

Negação

Chama-se negação da proposição *p,* e representamos por *~p* , a proposição que tem o valor lógico oposto de *p.*

p	~p
V	F
F	V

Conjunção

Chama-se conjunção de duas proposições " p e q " e representamos por " $p \wedge q$ " a proposição composta que será verdadeira apenas quando as proposições p e q forem ambas verdadeiras e falsa em tod

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Conjunção

Chama-se conjunção de duas proposições " p e q " e representamos por " $p \wedge q$ " a proposição composta que será verdadeira apenas quando as proposições p e q forem ambas verdadeiras e falsa em todos os demais casos.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Chama-se disjunção de duas proposições ***p*** e ***q*** a proposição, representada por "p ou q", e indicada por " **p v q** ", que será falsa somente quando as proposições ***p*** e ***q*** forem ambas falsas e verdadeira em todas as demais situações.

p	*q*	*pvq*
V	*V*	
V	*F*	
F	*V*	
F	*F*	

Disjunção

Chama-se disjunção de duas proposições ***p*** e ***q*** a proposição, representada por "p ou q", e indicada por " **p v q** ", que será falsa somente quando as proposições ***p*** e ***q*** forem ambas falsas e verdadeira em todas as demais situações.

p	*q*	*pvq*
V	*V*	*V*
V	*F*	*V*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Carmem é rica.	***p***
Carmem é feliz.	*q*

	~p
	~q

	p∧q
	p∨ q

Carmem é rica.	***p***
Carmem é feliz.	*q*

Carmem é pobre.	***~p***
Carmem é infeliz.	*~q*

Carmem é rica e feliz.	***p∧q***
Carmem é rica ou é feliz	*p∨ q*

Carmem é rica.	p
Carmem é feliz.	q

	$\sim p \wedge q$
	$p \vee \sim q$

	$p \wedge \sim q$
	$\sim p \vee q$

Carmem é rica.	p
Carmem é feliz.	q

Carmem é pobre e feliz.	$\sim p \wedge q$
Carmem é rica ou infeliz.	$p \vee \sim q$

Carmem é rica e infeliz.	$p \wedge \sim q$
Carmem é pobre ou feliz.	$\sim p \vee q$

Condicional

Chama-se proposição condicional → uma proposição representada por " **se p então q** ", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que ***p*** é verdadeira e ***q*** é falsa e a verdade (V) nos demais casos.

p	*q*	*p→q*
V	*V*	
V	*F*	
F	*V*	
F	*F*	

Condicional

Chama-se proposição condicional uma proposição representada por " **se p então q** ", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que ***p*** é verdadeira e ***q*** é falsa e a verdade (V) nos demais casos.

p	*q*	*p→q*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*V*

Bicondicional

Chama-se proposição bicondicional ↔ ou apenas bicondicional uma proposição representada por " **p se e somente se q**", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsa , e a falsidade (F) nos demais casos.

p	*q*	*p↔q*
V	*V*	
V	*F*	
F	*V*	
F	*F*	

Bicondicional

Chama-se proposição bicondicional ↔ ou apenas bicondicional uma proposição representada por " **p se e somente se q**", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsa , e a falsidade (F) nos demais casos.

p	*q*	*p↔q*
V	*V*	*V*
V	*F*	*F*
F	*V*	*F*
F	*F*	*V*

Carmem é rica.	*p*
Carmem é feliz.	*q*

	$p \to q$
	$q \to p$

	$\sim p \to q$
	$\sim q \to \sim p$
	$\sim p \to \sim q$

Carmem é rica.	*p*
Carmem é feliz.	*q*

Se Carmem é rica então ela é feliz.	$p \to q$
Se Carmem é feliz então ela é rica.	$q \to p$

Se Carmem é pobre então ela é feliz.	$\sim p \to q$
Se Carmem é infeliz então ela é pobre.	$\sim q \to \sim p$
Se Carmem é pobre então ela é infeliz.	$\sim p \to \sim q$

Carmem é rica.	***p***
Carmem é feliz.	*q*

	$p \leftrightarrow q$
	$\sim q \leftrightarrow \sim p$

Carmem é rica.	***p***
Carmem é feliz.	*q*

Carmem é rica se e somente se ela é feliz.	$p \leftrightarrow q$
Carmem é infeliz se e somente se ela é pobre.	$\sim q \leftrightarrow \sim p$

Observação

Ordem de precedência:
(mais fraco para o mais forte)

~	∧ e ∨	→	↔

Mário é alto.	p
Mário é elegante.	q

Mario é alto e elegante.	
Mario é alto, mas não é elegante.	
Não é verdade que Mario é baixo ou elegante.	
Mario não é nem alto nem elegante.	
É falso que Mario é baixo ou que não é elegante.	

Mário é alto.	p
Mário é elegante.	q

Mario é alto e elegante.	$p \wedge q$
Mario é alto, mas não é elegante.	$p \wedge \sim q$
Não é verdade que Mario é baixo ou elegante.	$\sim(\sim p \vee q)$
Mario não é nem alto nem elegante.	$\sim p \wedge \sim q$
É falso que Mario é baixo ou que não é elegante.	$\sim(\sim p \vee \sim q)$

Valor lógico das proposições

3+2=7 e 5+5=10	
$\sqrt{5}$ <0 ou Londres é a capital do Brasil.	
Não é verdade que 12 é um número ímpar.	
3+4=7 se e somente se 5^3=125	
Se 0<1 então $\sqrt{3}$ é irracional	
Se 3+2=5 então 4+4=9	
Se Tiradentes morreu afogado então Fortaleza é a capital do Rio.	

Valor lógico das proposições

$3+2=7$ e $5+5=10$	***F***
$\sqrt{5} <0$ ou Londres é a capital do Brasil.	***F***
Não é verdade que 12 é um número ímpar.	***V***
$3+4=7$ se e somente se $5^3=125$	***V***
Se $0<1$ então $\sqrt{3}$ é irracional	***V***
Se $3+2=5$ então $4+4=9$	***F***
Se Tiradentes morreu afogado então Fortaleza é a capital do Rio.	***V***

Exercício

Sabendo que os valores lógicos das proposições *p* e *q* são respectivamente **V** e **F**, determinar o valor logico de cada uma das seguintes proposições:

$p \wedge \sim q$		
$\sim p \wedge q$		
$p \vee \sim q$		
$\sim p \vee q$		

Exercício

Sabendo que os valores lógicos das proposições *p* e *q* são respectivamente **V** e **F**, determinar o valor logico de cada uma das seguintes proposições:

p ∧~q	V ∧V	V
~p ∧q	F ∧ F	F
p∨~q	V ∨V	V
~p∨q	F∨F	F

Exercício

Sabendo que os valores lógicos das proposições *p* e *q* são respectivamente **V** e **F**, determinar o valor logico de cada uma das seguintes proposições:

p→q		
q→p		
~p→q		
~q→p		

Exercício

Sabendo que os valores lógicos das proposições *p* e *q* são respectivamente **V** e **F**, determinar o valor logico de cada uma das seguintes proposições:

p→q	V→F	F
q→p	F→V	V
~p→q	F→F	V
~q→p	V→V	V

Exercício

Sabendo que os valores lógicos das proposições *p* e *q* são respectivamente **V** e **F**, determinar o valor logico de cada uma das seguintes proposições:

p↔q		
~p↔~q		
~p↔q		
~q↔p		

Exercício

Sabendo que os valores lógicos das proposições *p* e *q* são respectivamente **V** e **F**, determinar o valor logico de cada uma das seguintes proposições:

$p \leftrightarrow q$	$V \leftrightarrow F$	F
$\sim p \leftrightarrow \sim q$	$F \leftrightarrow V$	F
$\sim p \leftrightarrow q$	$F \leftrightarrow F$	V
$\sim q \leftrightarrow p$	$V \leftrightarrow V$	V

Exercício

- Determinar V(p)

		V(p)
V(q)=F	$V(p \wedge q)=F$	
V(q)=F	$V(p \vee q)=F$	
V(q)=F	$V(p \rightarrow q)=F$	
V(q)=F	$V(p \wedge q)=V$	
V(q)=V	$V(p \leftrightarrow q)=F$	
V(q)=F	$V(p \leftrightarrow q)=V$	

Exercício

- Determinar V(p)

		V(p)
V(q)=F	V(p∧q)=F	V ou F
V(q)=F	V(p∨q)=F	F
V(q)=F	V(p→q)=F	V
V(q)=F	V(p∧q)=V	não
V(q)=V	V(p↔q)=F	F
V(q)=F	V(p↔q)=V	F